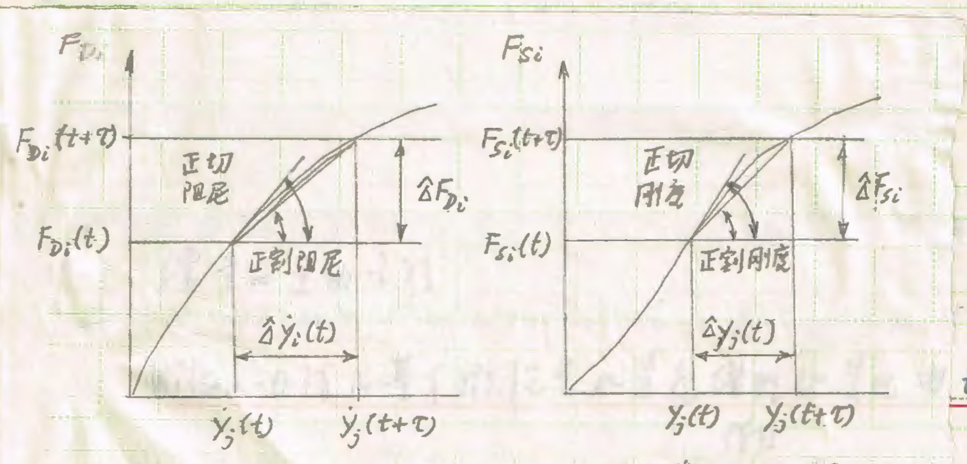
逐步积分法—Wilson θ法
用逐步求解多自由度系统 {线性 非线性
线性加速度法—条件稳定
Wilson θ法—无条件稳定的
与数值稳定性与所选步长大小无关

第十九章　多自由度系统的非线性反应

在第七章中用逐步线性加速度方法的单自由度系统的非线性分析已经提出过。本章中这方法的扩展，用称作Wilson-θ方法修改，对于推广为多自由度系统的结构的解被研究。在Wilson的方法引入的修改用于保证解的过程的数值稳定性不考虑所选时间步长的大小，由此原因此法称之为无条件稳定的。另一方面，没有Wilson的修改，逐步线性加速度方法仅仅是条件稳定的，和为了解的数值稳定性可能需要如此短的时间步长致使方法基本上是不可能实现的。对于线性和非线性多自由度系统用逐步线性加速度方法需要算法的研究，多少类似于第七章中对于单自由度系统里的介绍。



(a) 非线性粘滞阻尼 c_{ij}　　(b) 非线性刚度 k_{ij}

图19.1 影响参数的定义

t 至 $t+\theta\Delta t$ 超过

优化稳定和

逐步积分法—Wilson θ法
逐步求解多自由度系统 {线性 非线性
线性加速度法—条件稳定
Wilson θ法—无条件稳定的
与数值稳定性与所选步长大小无关

第十九章　多自由度系统的非线性反应

在第七章中用逐步线性加速度方法的单自由度系统的非线性分析已经提出过。本章就是这个方法的扩展，用经修正的Wilson-θ方法修改，对于模拟为多自由度系统的结构的解被研究。在Wilson的方法引入的修改用于保证解的过程的数值稳定性（不考虑所选）对于时间步长的大小，由此原因此法称为无条件稳定的。另一方面，没有Wilson的修改，逐步线性加速度方法仅仅是条件稳定的，和为了解的数值稳定性可能需要如此极端小的时间步长致使方法若不是不可能即是不实际的。对于线性和非线性多自由度系统用逐步线性加速度方法需要写法的研究，了解该在第七章中对于单自由度系统里的介绍。

19.1　增量的运动方程

Wilson-θ法的基本假设是加速度线性地变化由 t 至 $t+\theta\Delta t$ 扩展时间间隔，此处 $\theta \geq 1.0$。因子 θ 的值确定以获得数值过程的优化稳定和

解的精度来确定。已经被 Wilson 指出，当 $\theta \geq 1.38$，方法成为无条件稳定。

表达为增量的平衡条件的方程 对于多自由度系统 解的进行为矩阵形式很容易来相当于对于单自由度系统运动的增量方程，方程(7-12)。由此取定义在时间 t_i 和 $t_i+\tau$ 处动力平衡条件之间的差，我们得到 此处 $\tau=\theta\Delta t$， 增量方程

$$M\hat{\Delta}\ddot{y}_i + C(\dot{y})\hat{\Delta}\dot{y}_i + K(y)\hat{\Delta}y_i = \hat{\Delta}F_i \qquad (19.1)$$

其中 在 Δ 之上的声调符号指明 增量与扩展时间步长 $\tau=\theta\Delta t$ 相一致，

由此

$$\hat{\Delta}y_i = y(t_i+\tau) - y(t_i), \qquad (19.2)$$

$$\hat{\Delta}\dot{y}_i = \dot{y}(t_i+\tau) - \dot{y}(t_i), \qquad (19.3)$$

$$\hat{\Delta}\ddot{y}_i = \ddot{y}(t_i+\tau) - \ddot{y}(t_i), \qquad (19.4)$$

和

$$\hat{\Delta}F_i = F(t_i+\tau) - F(t_i) \qquad (19.5)$$

常用切线刚度，因为割线刚度还有一个迭代过程

在等(19.1)方程中，我们假定，如早先已章对于单自由度系统所解释的，刚度和阻尼由对于每个时间步长作为相应的曲线如图19.1的正切的斜值而得到 而不采用割线的倾向它需要迭代。因而刚度系数被定义为

$$k_{ij} = \frac{dF_{si}}{dy_j} \qquad (19.6)$$

和阻尼系数为

$$c_{ij}=\frac{dF_{Di}}{d\dot{y}_j}$$

其中 F_{Si} 和 F_{Di} 分别是在节点坐标 i 处的弹性和阻尼力；和 y_j 和 $\dot{y}_j$ 分别是在节点坐标 j 处的位移和速度。

19.2 Wilson-θ 法

用由Wilson所引入的具有扩展步长的逐步线性加速度法的非线性运动方程的积分，如前面已经提到过的，是基于

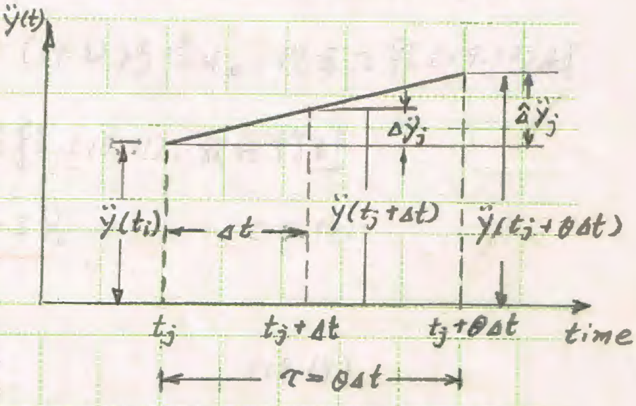


图19.2 在扩展的时间间隔中的线性加速度假设

加速度可以由线性函数在时间步长 $\tau=\theta\Delta t$ 期限内来代表，如在图19.2中所示。由此图我们能够写出加速度在扩展时间步长内的线性表达式为

$$\ddot{y}(t)=\ddot{y}_i+\frac{\hat{\Delta}\ddot{y}_i}{\tau}(t-t_i) \qquad (19.8)$$

其中 $\hat{\Delta}\ddot{y}_i$ 由方程(19.4)给出。积分(19.8)两次得到

$$\dot{y}(t)=\dot{y}_i+\ddot{y}_i(t-t_i)+\frac{1}{2}\frac{\hat{\Delta}\ddot{y}_i}{\tau}(t-t_i)^2 \qquad (19.9)$$

和

$$y(t)=y_i+\dot{y}_i(t-t_i)+\frac{1}{2}\ddot{y}_i(t-t_i)^2+\frac{1}{6}\frac{\hat{\Delta}\ddot{y}_i}{\tau}(t-t_i)^3 \qquad (19.10)$$

在扩展间隔 $t=t_i+\tau$ 的端部处方程(19.9)和(19.10)的计算给出

$$\hat{\Delta}\dot{y}_i=\ddot{y}_i\tau+\frac{1}{2}\hat{\Delta}\ddot{y}_i\tau \qquad (19.11)$$

和

$$\hat{\Delta}y_i=\dot{y}_i\tau+\frac{1}{2}\ddot{y}_i\tau^2+\frac{1}{6}\hat{\Delta}\ddot{y}_i\tau^2 \qquad (19.12)$$

其中 $\hat{\Delta}y_i$ 和 $\hat{\Delta}\dot{y}_i$ 分别由方程(19.2)和(19.3)所定义。现在方程(19.12)对于增量加速度 $\hat{\Delta}\ddot{y}_i$ 求解出来代入方程(19.11)，我们得到

由(19.12)有

$$\hat{\Delta}\ddot{y}_i=\frac{6}{\tau^2}\hat{\Delta}y_i-\frac{6}{\tau}\dot{y}_i-3\ddot{y}_i \qquad (19.13)$$

和

再代入(19.11)

$$\hat{\Delta}\dot{y}_i=\frac{3}{\tau}\hat{\Delta}y_i-3\dot{y}_i-\frac{\tau}{2}\ddot{y}_i \qquad (19.14)$$

$$=\ddot{y}_i\tau+\frac{\tau}{2}\left(\frac{6}{\tau^2}\hat{\Delta}y_i-\frac{6}{\tau}\dot{y}_i-3\ddot{y}_i\right)$$

最后，代方程(19.13)和(19.14)入~~代~~增量的运动方程(19.1)，~~[illegible]~~得到对增量的~~[illegible]~~

$M\hat{\Delta}\ddot{y}_i + C_i\hat{\Delta}\dot{y}_i + K_i\hat{\Delta}y_i = \hat{\Delta}F_i$

位移 $\hat{\Delta}y_i$ 为~~方程(19.1)~~可以被写作

$$\bar{K}_i\hat{\Delta}y_i = \hat{\Delta}\bar{F}_i \qquad (19.15)$$

此处

$$\bar{K}_i = K_i + \frac{6}{\tau^2}M + \frac{3}{\tau}C_i \qquad (19.16)$$

和

$$\hat{\Delta}\bar{F}_i = \hat{\Delta}F_i + M\left(\frac{6}{\tau}\dot{y}_i + 3\ddot{y}_i\right) + C_i\left(3\dot{y}_i + \frac{\tau}{2}\ddot{y}_i\right). \qquad (19.17)$$

方程(19.15)具有与静力的增量的平衡方程相同的形式和可以用简单的解线性方程系统对于~~增量~~增量的线性位移 $\hat{\Delta}y_i$ 被解出。

为了解得对于扩展的时间间隔增量加速度 $\hat{\Delta}\ddot{y}_i$，$\hat{\Delta}y_i$ 的值由方程(19.15)所得到，被代入方程(19.13)。

$\hat{\Delta}\ddot{y}_i = \frac{6}{\tau^2}\hat{\Delta}y_i + \frac{6}{\tau}\dot{y}_i - 3\ddot{y}_i$

对于正常的时间间隔 Δt 的增量加速度 $\Delta\ddot{y}_i$ 值被得到用简单的线性插值。因而

$$\Delta\ddot{y} = \frac{\hat{\Delta}\ddot{y}}{\theta} \qquad (19.18)$$

去计算相应于正常的时间间隔 Δt 的增量的速度 $\Delta\dot{y}_i$ 和增量的位移 Δy_i

$\hat{\Delta}\dot{y}_i = \ddot{y}_i\tau + \frac{1}{2}\hat{\Delta}\ddot{y}_i\tau \qquad \hat{\Delta}y_i = \dot{y}_i\tau + \frac{1}{2}\ddot{y}_i\tau^2 + \frac{1}{6}\hat{\Delta}\ddot{y}_i\tau^2$

用只有扩展的时间间隔参数 τ 代之 Δt 的方程(19.11)和(19.12)就成，将 Δt 代替 τ 后，有

写

$$\Delta\dot{y}_i = \ddot{y}_i\Delta t + \frac{1}{2}\Delta\ddot{y}_i\Delta t \qquad (19.19)$$

和

$$\Delta y_i = \dot{y}_i\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{y}_i\Delta t^2 + \frac{1}{6}\Delta\ddot{y}_i\Delta t^2 \qquad (19.20)$$

最后，在这步的时间间隔端部处的位移 y_{i+1} 和速度 $\dot{y}_{i+1}$ 被计算为

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i \qquad (19.21)$$

和

$$\dot{y}_{i+1} = \dot{y}_i + \Delta \dot{y}_i \qquad (19.22)$$

如在前一章对于单自由度系统所指出的，对于下一步长的初始加速度应当由在时间 $t+\Delta t$ 处的动力平衡方程计算出，因此

$$\ddot{y}_{i+1} = M^{-1}\left[F_{i+1} - C_{i+1}\dot{y}_{i+1} - K_{i+1}y_{i+1}\right] \qquad (19.23)$$

其中乘积 $C_{i+1}\dot{y}_{i+1}$ 和 $K_{i+1}y_{i+1}$ 分别代表在时间步长 $t_{i+1}=t_i+\Delta t$ 处所计算的阻尼力和刚度力向量。一旦在时间 $t_{i+1}=t_i+\Delta t$ 处的速度和加速度向量被确定，上述的程序被全重复了计算在下一时间步长 $t_{i+2}=t_{i+1}+\Delta t$ 和此过程继续进行到所期望的总体时间。

逐步线性加速度，如在单自由度系统的讨论中所指明的，包括了两个基本的近似：(1) 在时间步长中加速度被假设为线性地变化和 (2) 结构的阻尼和刚度特征在时间步长的初始处被算出并假设在此时间间隔中保持常数。用 Wilson-θ 方法线性系统的积分过程的算法在下章中列出。就是此法对线性结构的应用在下章中被研究。