第六章　随机振动的时域特征

本章的任务　要找出随机振动过程在时间域上信息的，

$\underbrace{\text{均值、均方值}}$、$\underbrace{\text{自相关函数、互相关函数及相关系数等}}$。

它们描绘了随机过程在时域上的特征。

已讨论　　本章着重讨论

还要讨论褶积和褶积的性质。（因为系统对输入的反应在时域内可表为Duhamel积分（褶积））

§1　相关函数

图1，3以从里地看出 x_1 与 y_1 不相似，x_2 与 y_2 相似，但是难以看出 x_1 与 x_2，y_1 与 y_2 的相似程度。

探讨两个波形之间的相似程度。

如系统在某一随机扰力作用下，产生随机振动，此外尚有干扰也作用在系统上，系统在随机扰力源与干扰力作用下产生了综合的动力反应。

我们关心 随机扰力源的影响与结构的动力反应的相关性如何？

定量地研究两波相似程度。有两个波 $x(t)$ 和 $y(t)$，用 $K=\sum_i(x_i-y_i)$，不行，相似程度大，总的差值为零，因为 x_i，y_i 有正有负，(x_i-y_i) 也有正负，故要用均方差的方法。

均方差方法：　计算 $\sigma=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-y_i)^2$

σ 大 表明 $x_i(t)$，$y_i(t)$ 两波不相似

σ 小　　两波相似程度大

进一步分析上述均方差表达式的结构：

又　$\sigma=\underbrace{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i^2+\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}y_i^2}_{\text{代表两波各自的能量}}-\frac{2}{N}\underbrace{\sum_{i=1}^{N}x_iy_i}_{\text{决定两波相似程度}}$

用记号　$R=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_iy_i$　　R 愈小，σ 愈大，两波愈不相似

R 愈大，σ 愈小，　相似

有时两波形看不相似，但将 $y_3(t)$ 向右移动 τ 时间，则 $x_3(t)$ 与 $y_3(t)$ 就很相似了。因此仅用上式衡量相似与否不足，可用下式衡量

$$R(\tau)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i y_{i+\tau}$$

上面着重突出相关的物理意义

严格的相关定义为 $R_{xy}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\cdot y(t+\tau)\,dt$

(仅为各态历经过程的)

(或 $R_{xy}(\tau)=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\cdot y(t+\tau)\,dt$)

——称互相关函数

当 $x(t)=y(t)$ 时，定义为自相关函数： $R_x(\tau)=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\cdot x(t+\tau)\,dt$

自相关函数定义为随机变量 $x(t_1)$ 与 $x(t_2)$ 的乘积的集合平均。

对于平稳过程它祇是时滞 $\tau=t_2-t_1$ 的函数，即 $R_x(\tau)=E[x(t)x(t+\tau)]$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1x_2\,p(x_1,x_2,\tau)\,dx_1dx_2$$

(或遍历性)

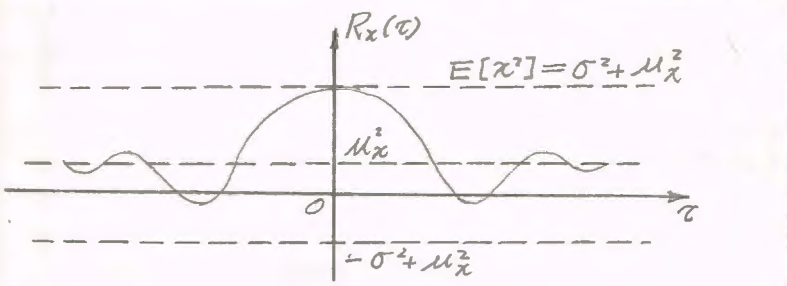
对于各态历经过程，自相关函数就等于单个样本上乘积 $x(t)x(t+\tau)$ 的时间平均：

$$R_x(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x(t)x(t+\tau)\,d\tau$$

自相关函数物理意义：自相关函数提供关于一个随机变量在一个时刻的值对这个变量在另一时刻的值的依赖关系的知识。

定义 $R_{xy}(\tau)=E[x_1y_2]$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1y_2\,p(x_1,y_2)\,dx_1\,dy_2$$ 为互相关函数



在一定条件下可以借谐和变换进行频率展开，得
$\omega)e^{i\omega t}d\omega$

$d\omega$带宽内的谐和分量。故从物理解释出发，对任意
$R_x(\tau)$也可以把它看成是"平均功率"随时差的变

以$R_x(\tau)$的谐和变换可得到下一章要讲到的功率谱
密度$S_x(f)$

1. 自相关函数的性质

(1) 当滞后时间（或称时移）$\tau=0$，自相关函数有正的最大值。（见图6-4）

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}[x(t)\pm x(t+\tau)]^2dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}[x^2(t)\pm 2x(t)x(t+\tau)+x^2(t+\tau)]dt$$

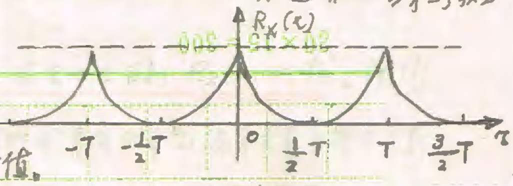
$$=\lim_{T\to\infty}\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x^2(t)dt\pm\lim_{T\to\infty}\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x(t)x(t+\tau)dt=2R_x(0)\pm 2R_x(\tau)\geqslant 0$$

的被积函数值
∵第一个积分不能是负的，
∴ — 〃 — ≥第二个积分

由此得到：i 在$\tau=0$处，自相关函数取极大值，

ii 由均方的定义知，$R_x(0)=\sigma_x^2$；$(\sigma^2\to\mu_x^2)$

iii 若$x(t)$是周期性的，则$R_x(\tau)$也是周期性的。

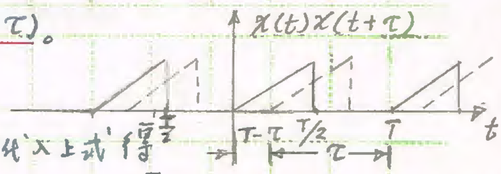


于是不仅在$\tau=0$时而且在τ等于周期的整数倍数时$R_x(\tau)$也取极大值。

(2) 自相关函数是偶函数，即 $R_x(\tau)=R_x(-\tau)$。

考虑到平稳过程的自相关函数只依赖于时差τ，故若取$x(t-\tau)$与$x(t)$作为随机变量，由此得出的自相关函数必然与原式$R_x(\tau)$相同，即有$R_x(-\tau)=R_x(\tau)$是τ的偶函数。

证明：$R_x(\tau)=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)x(t+\tau)dt$



令 $t+\tau=t'$，即 $t=t'-\tau$，代入上式得

$$R_x(\tau)=\frac{1}{T}\int_{\tau}^{\tau+T}x(t')x(t'-\tau)dt'=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)x(t-\tau)dt=R_x(-\tau)$$

平稳过程
与时间t无关，积分时间段长T一样。

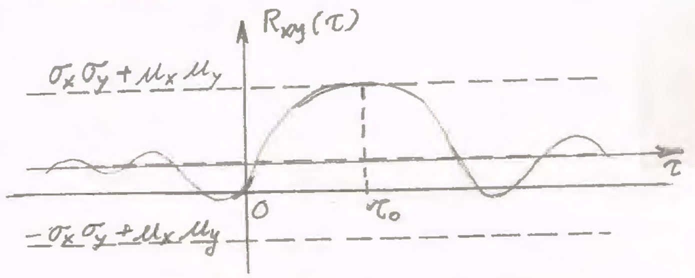
(3) 当时移$\tau\to\infty$时，$R_x(\tau)\to\mu_x^2$

当波形的时移不断增大，时移增大后的波形与原来波形相似程度就愈来

愈差，在$\tau\to\infty$时，就根

(4) 典型自相关函数图

特殊的自相关函数有



2. 互相关函数的性质

(1) 互相关函数$R_{xy}(\tau)$

(2) $\tau\to\infty$时，$R_{xy}(\tau)\to\mu_x\mu_y$。

$R_{xy}(\tau\to\infty)\to\mu_x\mu_y$
$R_{yx}(\tau\to\infty)\to\mu_y\mu_x$

(3) 一般说来，$R_{xy}(\tau)$不是τ的偶函数。但有 $R_{xy}(\tau)=R_{yx}(-\tau)$

证明：$R_{yx}(-\tau)=\frac{1}{T}\int_0^T y(t)x(t-\tau)dt$

令 $t'=t-\tau$

$$R_{yx}(-\tau)=\frac{1}{T}\int_{-\tau}^{T-\tau}y(t'+\tau)x(t')dt'$$

$$=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)y(t+\tau)dt=R_{xy}(\tau)$$ 得证

时间的任意函数 $x(t)$ 在一定条件下可以傅里叶变换进行频率展开，得

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

其 $[X(\omega)d\omega]e^{i\omega t}$

相当于 $x(t)$ 在频率 ω 处 $d\omega$ 带宽内的谐和分量。故从物理解释出发，对任意的 $x(t)$ 的自相关函数 $R_x(\tau)$ 也可以把它看成是"平均功率"随时差的变化。

这样就为了理解从 $R_x(\tau)$ 的谐和变换可得到下一章要讲到的功率谱密度 $S_x(f)$

§2 自相关函数性质

1. 自相关函数的性质

(1) 当滞后时间（或称时移）$\tau=0$，自相关函数有正的最大值。（见图6-4）

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}[x(t)\pm x(t+\tau)]^2dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}[x^2(t)\pm 2x(t)x(t+\tau)+x^2(t+\tau)]dt$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x^2(t)dt\pm\lim_{T\to\infty}\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x(t)x(t+\tau)dt=2R_x(0)\pm 2R_x(\tau)\geq 0$$

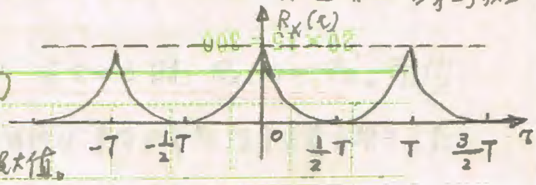
的被积函数值 ∵ 第一个积分不能是负的，∴ —〃— ≥ 第二个积分

由此得到：i 在 $\tau=0$ 处，自相关函数取极大值，

ii 由均方的定义知，$R_x(0)=\sigma_x^2$；$(\sigma^2\to\mu_x^2)$

iii 若 $x(t)$ 是周期性的，则 $R_x(\tau)$ 也是周期性的。

于是不仅在 $\tau=0$ 时而且在 τ 等于周期的整数倍数时 $R_x(\tau)$ 也取极大值。



(2) 自相关函数是偶函数，即 $R_x(\tau)=R_x(-\tau)$。

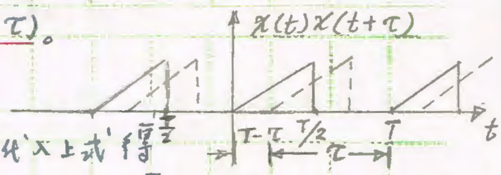
考虑到平稳过程的自相关函数只依赖于时差 τ，故若取 $x(t-\tau)$ 与 $x(t)$ 作为随机变量，由此得出的自相关函数必然与原式 $R_x(\tau)$ 相同，即有 $R_x(-\tau)=R_x(\tau)$ 是 τ 的偶函数。

证明：$R_x(\tau)=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)x(t+\tau)dt$

令 $t+\tau=t'$，即 $t=t'-\tau$，代入上式得

$$R_x(\tau)=\frac{1}{T}\int_\tau^{\tau+T}x(t')x(t'-\tau)dt'=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)x(t-\tau)dt=R_x(-\tau)$$

平稳过程与时间 t 无关，积分时间段长 T 一样。



(3) 当时移 $\tau\to\infty$ 时，$R_x(\tau)\to\mu_x^2$

当波形的时移不断增大，时移增大后的波形与原来波形相似程度就愈来愈差，在 $\tau\to\infty$ 时，就根本不相关，即 $R_x(\tau)\to 0$。

(4) 典型自相关函数举例列在下面图表中。

特殊的自相关函数有表可查。

2. 互相关函数的性质

(1) 互相关函数 $R_{xy}(\tau)$ 取值为正负实数，但 $R_{xy}(0)$ 不一定具有最大值

(2) $\tau\to\infty$ 时，$R_{xy}(\tau)\to 0.$ $\mu_x\mu_y$

$R_{xy}(\tau\to\infty)\to\mu_x\mu_y$

$R_{yx}(\tau\to\infty)\to\mu_y\mu_x$

(3) 一般说来，$R_{xy}(\tau)$ 不是 τ 的偶函数。但有 $R_{xy}(\tau)=R_{yx}(-\tau)$

证明：$R_{yx}(-\tau)=\frac{1}{T}\int_0^T y(t)x(t-\tau)dt$

令 $t'=t-\tau$

$$R_{yx}(-\tau)=\frac{1}{T}\int_{-\tau}^{T-\tau}y(t'+\tau)x(t')dt'$$

$$=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)y(t+\tau)dt=R_{xy}(\tau)$$ 得证

(4) 相关系数定义为

$$\rho_{xy}(\tau)=\frac{|R_{xy}(\tau)|^2}{R_x(0)\cdot R_y(0)}$$

可以简单证明 $\rho_{xy}(\tau)\le 1$。因为对任意常数 a、b 有，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x_1\pm y_2)^2 p(x_1,y_1)\,dx_1dy_2=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1^2 p(x_1,y_2)\,dx_1dy_2\pm 2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1y_2\,p(x_1,y_2)\,dx_1dy_2$$

$$\pm\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}y_2^2 p(x_1,y_2)\,dx_1dy_2=R_x(0)\pm 2R_{xy}(\tau)+R_y(0)\geqslant 0$$

∵ 上式中第一和第三个积分的被积函数不可能是负的，所以这个不等式成立。且仅当包含第不同区域的变量时才出现对时移 τ 的依赖性。由上式得到 $\frac{1}{2}[R_x(0)+R_y(0)]\geqslant|R_{xy}(\tau)|$

此外考虑对积分 $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{x_1}{\sqrt{R_x(0)}}\pm\frac{y_2}{\sqrt{R_y(0)}}\right]^2 p(x_1,y_2)\,dx_1dy_2$ 也是非负的，可以表明的

$$\sqrt{R_x(0)}\pm\frac{2R_{xy}(\tau)}{\sqrt{R_x(0)}\sqrt{R_y(0)}}+\sqrt{R_y(0)}\geqslant 0$$

$$R_x(0)R_y(0)\geqslant|R_{xy}(\tau)|^2$$

由上面的情况我们得出，两个平稳随机过程 $\{x_k(t)\}$ 和 $\{y_k(t)\}$ 的相关性质可以由相关函数 $R_x(\tau)$、$R_y(\tau)$、$R_{xy}(\tau)$ 和 $R_{yx}(\tau)$ 来描述。

又因为 $R_x(-\tau)=R_x(\tau)$，$R_y(-\tau)=R_y(\tau)$ —— 是偶函数，且满足 $R_{xy}(-\tau)=R_{yx}(\tau)$

只需对 τ 大于或等于零的值计算这些函数。

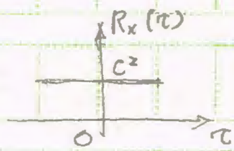
两者同量纲，那末 x、y 就代表随机的功率，而对于随机过程 x 与 y，则 $E[x(t)Y(t+\tau)]$ 可理解为"平均功率"随时差的变化。

例1. 求常数的自相关函数

设 $x(t)=C$

则 $R_x(\tau)=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)x(t+\tau)\,dt$

$$=\frac{1}{T}\int_0^T C^2\,dt=C^2$$



例2. 求正弦波的自相关函数

设随机过程 $\{X_k(t)\}=\{A\sin(\omega_0 t+\theta(k))\}$

其中 A 为振幅，ω_0 为频率

$\theta(k)$ 为相位，是随机变数

令 $\theta(k)$ 在 $[0,2\pi]$ 上有均匀概率密度

~~$E[\theta]=\frac{1}{2\pi}$~~

$$p(\theta)=\frac{1}{2\pi}\qquad 0\leq\theta\leq 2\pi$$

$$E[(ax(t)+by(t+\tau))^2] \geqslant 0$$

即 $$E[a^2x^2(t) + 2ab\,x(t)y(t+\tau) + b^2y^2(t+\tau)] \geqslant 0$$

$$a^2R_x(0) + 2ab\,R_{xy}(\tau) + b^2R_y(0) \geqslant 0$$

令 $b \neq 0$，有

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 R_x(0) + 2\left(\frac{a}{b}\right) R_{xy}(\tau) + R_y(0) \geq 0$$

方程是以 $\left(\frac{a}{b}\right)$ 为未知数的二次方程式。由于 a, b 为任意实常数，~~故方程必有不同~~ 为使此式对实数 a, b 的任何值皆成立，则

~~实根~~：

$$R_{xy}^2(\tau) - R_x(0)\cdot R_y(0) \leq 0$$

即 $$|R_{xy}(\tau)|^2 \leq R_x(0)\,R_y(0)$$

$\therefore$ $$\rho_{xy}(\tau) \leq 1 \quad \frac{|R_{xy}(\tau)|^2}{R_x(0)\cdot R_y(0)} \leq 1$$

对互相关函数也可作出类似于自相关函数的物理解释。

假设 x 代表激振力

y 代表激振点速度

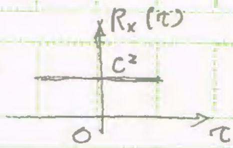
两者同方位，那末 xy 就代表激振的功率。而对于随机过程 x 与 y，则 $E[X(t)Y(t+\tau)]$ 可经为为"平均功率"随时差的变化。

例1. 求常数的自相关函数

设 $x(t) = c$

则 $$R_x(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,x(t+\tau)\,dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T c^2\,dt = c^2$$



例2. 求正弦波的自相关函数

设随机过程 $\{X_k(t)\} = \{A\sin(\omega_0 t + \theta(k))\}$

其中 A 为振幅，ω_0 为频率

$\theta(k)$ 为相位，是随机变数

令 $\theta(k)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上有均匀的概率密度

~~$E[\theta] = \frac{1}{2\pi}$~~

$$p(\theta) = \frac{1}{2\pi} \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

求正弦函数 $x(t)=A\sin(\omega t-\varphi)$ 的自相关函数

解：按定义有

$$R_x(\tau)=\frac{\omega}{2\pi}\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega}x(t)\,x(t+\tau)\,dt$$

$$=\frac{\omega}{2\pi}\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega}A^2\sin(\omega t-\varphi)\sin(\omega t+\omega\tau-\varphi)\,dt$$

$$=\frac{\omega}{2\pi}\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega}\frac{A^2}{2}\left[\cos(-\omega\tau)-\cos(2\omega t-2\varphi+\omega\tau)\right]dt$$

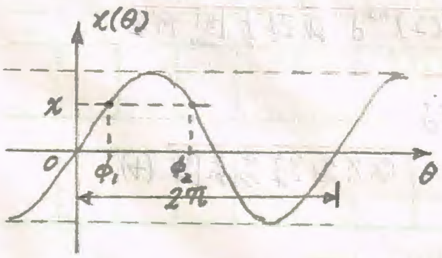
$$=\frac{\omega}{2\pi}\,\frac{A^2}{2}(\cos\omega\tau)\,t\Big|_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega}$$

$$=\frac{A^2}{2}\cos\omega\tau$$

$x(\phi)=A\sin(\omega t_0+\phi)$，假定 ϕ 是有均匀的概率密度函数
并且只考虑区间 $0<\phi<2\pi$，

我们可以写成

$$p(\phi)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi} & 0<\phi<2\pi\\ 0 & \phi<0,\ \phi>2\pi\end{cases}$$



再看 $x(t)$ 包含二次谐波的情形，假设

$$x(t)=a_1\sin(\omega t+\varphi_1)+a_2\sin(\omega t+\varphi_2)$$

对它求自相关函数，有

$$R_x(\tau)=\frac{\omega}{2\pi}\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega}\{a_1\sin(\omega t+\varphi_1)+a_2\sin(2\omega t+\varphi_2)\}\{a_1\sin(\omega t+\varphi_1+\omega\tau)+a_2\sin(2\omega t+\varphi_2+2\omega\tau)\}dt$$

$$=\frac{a_1^2}{2}\cos\omega\tau+\frac{a_2^2}{2}\cos 2\omega\tau$$

注意到它仍保持着单个谐和函数情形下的对应关系。推而广之，设

$$x(t)=\sum_{k=1}^{n}a_k\sin(k\omega t+\varphi_k)$$

则相应地有 $R_x(\tau)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}a_k^2\cos k\omega\tau$

注意到，时间的周期函数通常可展为谐和级数，所以，时间 t 的周期函数 $x(t)$ 的自相关函数 $R_x(\tau)$ 一定是时差 τ 的周期函数，二者有着相同的基本周期，且后者的各对应谐和分量的系数就等于前者相应分量的"均方值"

$$R_x(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}A\sin(\omega_0t+\theta)\cdot A\cdot\sin[\omega_0(t+\tau)+\theta]\,d\theta$$

$$=\frac{A^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(\omega_0t+\theta)\cdot\sin[\omega_0(t+\tau)+\theta]\,d\theta$$

$$=\frac{A^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(\omega_0t+\theta)\left[\sin(\omega_0t+\theta)\cdot\cos\omega_0\tau+\sin\omega_0\tau\cos(\omega_0t+\theta)\right]d\theta$$

$$=\frac{A^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\sin^2(\omega_0t+\theta)\cdot\cos\omega_0\tau+\frac{1}{2}\sin 2(\omega_0t+\theta)\cdot\sin\omega_0\tau\right]d\theta$$

$$=\frac{A^2}{2\pi}\left[\cos\omega_0\tau\int_0^{2\pi}\sin^2(\omega_0t+\theta)\,d\theta+\sin\omega_0\tau\cdot\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin 2(\omega_0t+\theta)\,d\theta\right]$$

$$=\frac{A^2}{2\pi}\cos\omega_0\tau\cdot\pi=\frac{A^2}{2}\cos\omega_0\tau$$

作为随机过程，不一定非具有不规则波形不可，即不一定非要包括很多频率分量不可。

简谐的、周期的或非周期的波形是不是随机过程，决定于这些波形是不是可以予先被完全确定下来。

假设 $x(t)=A\sin(\omega t+\varphi)$ 代表力，而 $x(t+\tau)=A\sin(\omega t+\varphi+\omega\tau)$ 代表力作用点的速度，当力与速度同方向时，下述积分 $\frac{1}{T}\int_0^T A^2\sin(\omega t+\varphi)\sin(\omega t+\varphi+\omega\tau)dt$ 代表"平均功率"，它就是 x 的自相关函数 $R_x(\tau)$。

注意到 $R_x(\tau)=\frac{A^2}{2\pi}\cos\omega_0\tau$ 它是 $\omega\tau$ 的余弦函数，显然丢失了相位的信息，但保留着与 x 相同的频率，且其振幅就是均方值 $R_x(0)$。（接上页）

§3 褶积（convolution）

假定有两个函数，$x(t)$ 与 $h(t)$，下列积分

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau$$

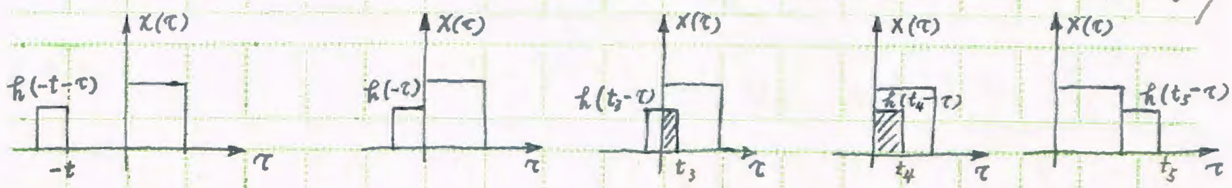
就叫做 $x(t)$ 和 $h(t)$ 的褶积。记作 $y(t)=x(t)*h(t)$。

由上述定义式中可以看出：函数 $x(t)$ 在 τ 时刻为 $x(\tau)$

$h(t)$ 在 τ 时刻为 $h(\tau)$

而 $h(t-\tau)$ 就是将其象函数 $h(-\tau)$ 移动一个 t 值。

两个函数值 $x(\tau)$ 与 $h(t-\tau)$ 的乘积在整个时间轴上对 τ 积分就是两个函数的褶积。其含义可由右示一组图表示。



$x(\tau)$ 与 $h(-t-\tau)$ 无公共面积，故其积分值为零　$-t=\cancel{\ }\,t_1$

积分也为零　$t=t_2$

$t=t_3$

$t=t_4$

当 $t\geq t_5$ 时公共面积又没有了，积分又变为零

对于周期函数，其褶积定义为在其周期上进行积分，即

$$y(t)=\int_0^T x(t)\cdot h(t-\tau)\,d\tau$$

例：计算 $x(t)=h(t)=\sin t$ 的褶积

$$y(t)=\int_0^{2\pi}\sin\tau\cdot\sin(t-\tau)\,d\tau$$

$$=\sin t\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos\tau\sin\tau\,d\tau}_{0}-\cos t\cdot\int_0^{2\pi}\sin^2\tau\,d\tau$$

$$=-\pi\cos t$$

$$=-\cos t\left[\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{2\pi}$$

$$=-\cos t\left[\frac{2\pi}{2}\right]=-\pi\cos t$$

可以看出正弦函数其褶积为余弦函数。

§4 褶积性质

1. 线性可加性

设有函数 $x(t)$, $h(t)$, $f(t)$, a, b 为常数

则 $[a x(t)+b f(t)]*h(t)=a[x(t)*h(t)]+b[f(t)*h(t)]$

证明：

$$[a x(t)+b f(t)]*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}[a x(\tau)+b f(\tau)]h(t-\tau)\,d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}a x(\tau)\cdot h(t-\tau)\,d\tau+\int_{-\infty}^{\infty}b f(\tau)\cdot h(t-\tau)\,d\tau$$

$$=a[x*h]+b[f*h]$$ 得证

2. 褶积满足交换律

即 $x(t)*h(t)=h(t)*x(t)$

证明：

$$x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$$

作代换 令 $\sigma=t-\tau$，则 $\tau=t-\sigma$， $d\tau=-d\sigma$

则有 $x(t)*h(t)=-\int_{\infty}^{-\infty}x(t-\sigma)\cdot h(\sigma)\,d\sigma$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}h(\sigma)x(t-\sigma)\,d\sigma$$

$$=h(t)*x(t)$$

3. 与脉冲函数的卷积

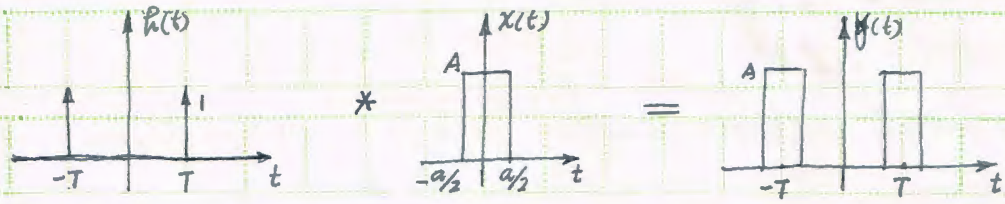
假若 $h(t)$ 为 δ 函数，$x(t)$ 为矩形函数，~~则有~~ 合记求

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}[\delta(\tau-T)+\delta(\tau+T)]x(t-\tau)d\tau$$

由 δ 函数的性质知

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau-T)x(\tau)d\tau=x(T)$$

则有 $y(t)=x(t-T)+x(t+T)$



计算一函数与 δ 函数的卷积，就是简单地将该函数移至 δ 函数的座标位置上重新构图。

4. 频率卷积定理

卷积 $h(t)*x(t)\longleftrightarrow H(f)\cdot X(f)$

Fourier 变换性质的卷积定理 —— 两函数的付氏变换等于各自付氏变换的乘积。

频率卷积定理：两个函数乘积的付氏变换等于各自付氏变换的卷积。

$$h(t)\cdot x(t)\longleftrightarrow H(f)*X(f)$$

§5 相关分析的应用

与振动有关的应用有：

1. 检测混淆在随机数据中的确定性数据。—— 例如脉动测试自振特性

利用自相关函数的性质由其典型的自相关曲线，可以从随机数据中区别出混淆在其中的正弦分量。

正弦波或其他确定性数据在所有时间位移值上都有自相关函数值 $R_{xx}(\tau\to\infty)\neq 0$，而随机数据则 $R_{xx}(\tau\to\infty)=0$

2、确定输入、输出函数的相关程度 ——相关系数的应用

计算输入函数与反应函数的相关系数，当 ρ_{xy} 接近1表明相关程度大，反之 ρ_{xy} 接近零，表明输出与输入不相关，说明结构受有其他强烈外扰。由此可分析振源与噪声源，为排除噪声提供依据。

3.确定滞后时间 ——用互相关图定传递时间

计算输入与输出函数之间的互相关函数，绘出互相关图，其最大峰值所对应的时移值就是系统输入到输出的传递时间。

4.确定传递通道

把各个扰动源输入给线性系统，由于各通道有不同的传输时间，可将在输入与输出函数间的各个互相关函数中找出各自的峰值。

5.随机数据分析中，相关函数的一个重要应用是其Fourier变换等于功率谱密度函数。