共五页

兰州铁道学院

前面问题中待定函数出现了高阶导数，实际问题中待定函数往往不止一个.

§1.9 多个待定函数的泛函 Hamilton原理

(1) Euler－Lagrange方程

为了与分析力学中的 Lagrange 方程对照，本节中把自变量记为 t，

待定函数记为 $q_1, q_2, \cdots, q_n$

它们的导数记为 $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n$

问题是求函数 $q_1(t), q_2(t), \cdots, q_n(t)$，使泛函

$$J=\int_a^b L(t, q_1, q_2, \cdots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n)\,dt \qquad (1)$$

取极值.

有多个待定函数 每个待定函数有一个一阶导数.

取一阶变分，有 ~~共有2n项，每两项对每一个自变函数q_i，其中一阶项需降阶，~~

$$\delta J=\int_a^b\left[\frac{\partial L}{\partial q_1}\delta q_1+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\delta \dot{q}_1+\cdots+\frac{\partial L}{\partial q_n}\delta q_n+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}\delta \dot{q}_n\right]dx$$

对一阶导数项通过分部积分，就有

$$\int_a^b\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\delta \dot{q}_1 dt=\int_a^b\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}d(\delta q_1)=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\cdot\delta q_1\Big|_a^b-\int_a^b\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right)\cdot\delta q_1\,dt$$

$\cdots\cdots$

$$\int_a^b\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}\delta \dot{q}_n dt=\int_a^b\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}d(\delta q_n)=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}\delta q_n\Big|_a^b-\int_a^b\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}\right)\cdot\delta q_n\,dt$$

由此得到 未降阶的 降阶后的 积出的.

$$\delta J=\int_a^b\left\{\sum_{r=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial q_r}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\right)\right]\delta q_r\right\}dt+\left\{\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\delta q_r\right\}\Big|_a^b \qquad (2)$$

这里待定函数的变分 δq_r，$r=1,2,\cdots,n$ 都是任意选的，

当然可以选 δq_1 满足一般变分要求，而令 $\delta q_2=\delta q_3=\cdots=\delta q_n=0$

于是由前$=0$证明

$$\frac{\partial L}{\partial q_1}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right)+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\delta q_1\Big|_a^b=0$$

由边界条件得
(几何的或自然的)

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\delta q_1\Big|_a^b=0 \qquad (3)$$

则有

$$\frac{\partial L}{\partial q_1}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right)=0 \qquad (4)$$

用相同的方法，可以逐步证明其他各式，即对有 n 个待定函数的变分问题

有

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q_r}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\right)=0}\ , \quad r=1,2,\cdots,n \qquad (5)$$

~~方程组(5)叫做 Euler 方程，此即分析力学中的 Lagrange 方程.~~

1744年 Euler 以繁琐过回的方法得到，1755年 Lagrange 用简捷方法得到，人们称之为 Euler－Lagrange 方程.

在分析力学中，式中L为质点系动能和势能之差，即

$$L = T - V$$

称为Lagrange函数或动势，是时间t、广义坐标q、广义速度$\dot{q}$的函数。式中T为系统的动能，V为系统的势能。（我们知道动能T是广义速度$\dot{q}$的二次式，势能V是广义位移的二次式）

作为变分问题而言，用同样的精神可以处理多个待定函数且有待定函数高阶导数的泛函，将得到一个Euler－Poisson方程组。

(2) Hamilton原理

凡力学原理采用到变分运算的称为力学变分原理。

力学变分原理有微分形式，如虚功原理；也有积分形式，如Hamilton原理。

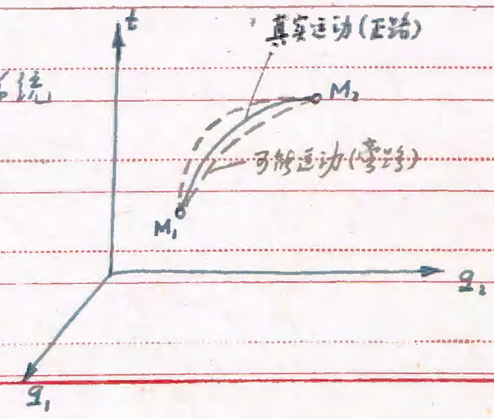
力学里的变分原理和几何公理一样，事先不加证明，只要由它推出的所有论断都和实际情况相符就行了。

下面我们介绍Hamilton原理：

设质点系具有理想约束，主动力都是有势力，确定质点系的广义坐标为$q_1, q_2, \cdots, q_s$。

若任意给定函数$q_\sigma = q_\sigma(t)$，$\sigma = 1, 2, \cdots, s$。则得到的是质点系为约束所允许的某一运动，但这只是从运动学观点看来是可能的运动，它并不一定符合动力学的条件，因而不一定是质点系在主动力作用下的真实运动。

在$S+1$维空间里，以q_σ和t为坐标，则q_σ和t的一组数值可确定一个点，所以在时间间隔$t_1 \le t \le t_2$内质点系的运动可以用一段曲线M_1M_2来表示。



对于只有两个广义坐标q_1, q_2的系统可以用右图所示的三维空间来描述。

在$t = t_1$及$t = t_2$时质点系有相同的位置M_1，M_2。图中实线对应于质点系的真实运动，称为正路。

虚线对应于与真实运动相近的可能运动

称为变分。

在Hamilton原理中用来作比较的是某一时间间隔 $t_1\sim t_2$ 内质点系的真实运动及其相近的运动的一种特征量，称为Hamilton作用量。

Hamilton作用量定义为

$$S=\int_{t_1}^{t_2} L(t,q_\sigma,\dot q_\sigma)\,dt$$

式中被积函数L是质点系的动能与势能之差

$$L(t,q_\sigma,\dot q_\sigma)=T-V$$

称为Lagrange函数或动势。

对应于不同的轨道 Hamilton作用量S具有不同的值。

Hamilton原理：在相同的时间间隔 t_1 至 t_2，质点系从相同的初位置到达相同的终位置，并在相同的约束条件下，保守系统在所有可能的各种运动中，其真实运动使Hamilton作用量具有极值，即

$$\delta S=\delta\int_{t_1}^{t_2} L(t,q_\sigma,\dot q_\sigma)\,dt=0$$

为了使大家便于理解，现从Lagrange方程出发证明Hamilton原理。

已知Lagrange方程为　　(也作为变分运算的练习)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_\sigma}-\frac{\partial L}{\partial q_\sigma}=0 \qquad (\sigma=1,2,\cdots,s)$$

上面每一式乘以 δq_σ 然后相加，得

$$\sum_{\sigma=1}^{s}\left[\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_\sigma}\right)\delta q_\sigma-\frac{\partial L}{\partial q_\sigma}\delta q_\sigma\right]=0$$

我们知道

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_\sigma}\delta q_\sigma\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_\sigma}\right)\cdot\delta q_\sigma+\frac{\partial L}{\partial \dot q_\sigma}\frac{d}{dt}\delta q_\sigma$$
$$=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_\sigma}\right)\delta q_\sigma+\frac{\partial L}{\partial \dot q_\sigma}\delta \dot q_\sigma$$

代入后有

$$\sum_{\sigma=1}^{s}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_\sigma}\delta q_\sigma\right)-\sum_{\sigma=1}^{s}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_\sigma}\delta \dot q_\sigma+\frac{\partial L}{\partial q_\sigma}\delta q_\sigma\right)=0$$

$\because L(t,q_\sigma,\dot q_\sigma)$

$\therefore$ 第二项可写为 δL，移至等号右侧，就有

$$\frac{d}{dt}\sum_{\sigma=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot q}\delta q_\sigma=\delta L$$

等式两侧乘dt并从 t_1 至 t_2 积分

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta L\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\Big(\frac{d}{dt}\sum_{\sigma=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\sigma}\delta q_\sigma\Big)dt=\int_{t_1}^{t_2}d\sum_{\sigma=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\sigma}\delta q_\sigma$$

$$=\sum_{\sigma=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\sigma}\delta q_\sigma\Big|_{t_1}^{t_2}$$

根据已知条件，在 $t=t_1$ 及 $t=t_2$ 时，质点学的正路和旁路有相同的点 M_1、M_2，故上式中 δq_σ 在 $t=t_1$、$t=t_2$ 时均为零，就知

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta L\,dt=0$$

这固定端点的变分问题

又积分和变分的次序可互易，就得

$$\boxed{\delta\int_{t_1}^{t_2}L\,dt=0}$$

这就从Lagrange方程推出了Hamilton原理。

可以从Hamilton原理推出牛顿运动方程

设质点系的质量为 $m_i\ (i=1,2,\cdots,n)$，坐标为 (x_i,y_i,z_i)，在质点上作用着的力 F_i 是以 $(-V)$ 为力函数(即势函数)的：

$$F_{x_i}=-\frac{\partial V}{\partial x_i},\qquad F_{y_i}=-\frac{\partial V}{\partial y_i},\qquad F_{z_i}=-\frac{\partial V}{\partial z_i},\qquad i=1,2,\cdots,n$$

而势函数 V 只依赖于质点的坐标，这是一个保守力场。亦即

$$V=V(x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2,\cdots,x_n,y_n,z_n)$$

动能是

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i(\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2+\dot{z}_i^2)$$

其中 $\dot{x}_i,\dot{y}_i,\dot{z}_i$ 分别代表 $\frac{dx_i}{dt},\frac{dy_i}{dt},\frac{dz_i}{dt}$，Hamilton原理要求

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(T-V)dt=\int_{t_1}^{t_2}(\delta T-\delta V)dt=0$$

其中

$$\delta T=\sum_{i=1}^{n}m_i(\dot{x}_i\delta\dot{x}_i+\dot{y}_i\delta\dot{y}_i+\dot{z}_i\delta\dot{z}_i)$$

$$\delta V=\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{\partial V}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial V}{\partial y_i}\delta y_i+\frac{\partial V}{\partial z_i}\delta z_i\Big)$$

$$=-\sum_{i=1}^{n}(F_{x_i}\delta x_i+F_{y_i}\delta y_i+F_{z_i}\delta z_i)$$

通过分部积分，并设起始质点位置 $(x_i(t_1),y_i(t_1),z_i(t_1))$ 已知，亦即 $\delta x_i(t_1),\delta y_i(t_1),\delta z_i(t_1)$ 都等于零，同时在 $t=t_2$ 时，$(x_i(t_2),y_i(t_2),z_i(t_2))$ 终点位置已知，$\delta x_i(t_2),\delta y_i(t_2),\delta z_i(t_2)$ 等于零，可得

$$=\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{x}_i\,\delta\dot{x}_i\right)dt+\cdots+\cdots=\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{x}_i\,d(\delta x_i)+\cdots+\cdots=\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{x}_i\,\delta x_i\Big|_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{n} m_i\ddot{x}_i\,\delta x_i\,dt+\cdots$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta T\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{x}_i\,\delta\dot{x}_i+\dot{y}_i\,\delta\dot{y}_i+\dot{z}_i\,\delta\dot{z}_i)dt=-\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{n} m_i(\ddot{x}_i\,\delta x_i+\ddot{y}_i\,\delta y_i+\ddot{z}_i\,\delta z_i)dt$$

代入 $\int_{t_1}^{t_2}\delta T\,dt-\int_{t_1}^{t_2}\delta V\,dt=0$

于是 Hamilton 原理可以写为

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{n}\left\{(m_i\ddot{x}_i-F_{x_i})\delta x_i+(m_i\ddot{y}_i-F_{y_i})\delta y_i+(m_i\ddot{z}_i-F_{z_i})\delta z_i\right\}dt=0$$

由于 δx_i, δy_i, δz_i 都是任意的独立变分，所以 ~~Euler-Poisson~~ 得运动方程组：

$$m_i\ddot{x}_i=F_{x_i},\quad m_i\ddot{y}_i=F_{y_i},\quad m_i\ddot{z}_i=F_{z_i},\quad i=1,2,\cdots,n$$

这就是 n 个质点的 $3n$ 个 Newton 运动方程。